MECANIQUE DU SOLIDE

Moment d'inertie

EXERCICE 1 (éléments de cours à connaître par cœur)

a) Que caractérise le moment d'inertie ? la distribution de la masse par rapport à un axe donné.

b) Unité MKS du moment d'inertie : kilogramme mètre carré (kg.m²)

c) Pour un solide en rotation, plus sa matière est loin de l'axe de rotation, plus son moment d'inertie est :

☑ grand ☐ petit

EXERCICE 2 (contextes d'utilisation du moment d'inertie ; à connaître par cœur)

CONTEXTE 1 : Le moment d'inertie intervient en **dynamique du solide en rotation**.

a) Rappeler le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) :

⇒ Théorème de la résultante dynamique : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m \times \overrightarrow{a_G}$

⇒ Théorème du moment dynamique : $\sum M_G\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = I_G \times \alpha$

Cas fréquent (à connaître) : *un moteur se compose d'un stator, fixe, et d'un rotor, c'est la partie tournante avec généralement un arbre en acier et des bobinages en cuivre ; tout ceci représente une masse mais aussi un moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation* (GX)*. Ce moment d'inertie est généralement noté* I_{GX} *ou* J_{GX} *et sa valeur est fournie directement par le constructeur du moteur :*

LSMV

Moteurs asynchrones triphasés à haut rendement pour variation de vitesse

Performances

Caractéristiques électriques sur réseau

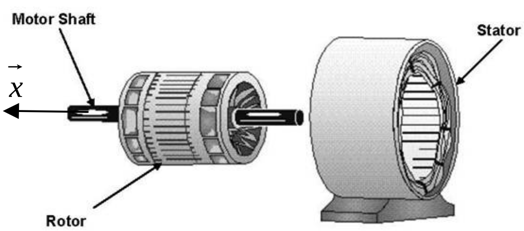
2 PÔLES - 3000 min^{-1} - IP55 - CLASSE F - ΔT80K - S1 - CLASSE IE2

Type	Puissance nominale	Vitesse nominale	Moment nominal	Intensité nominale	Facteur de puissance			Rendement CEI 60034-2-1 2007			Moment maximum/ Moment nominal	Moment d'inertie	Masse	Bruit
	P_N	N_N	M_N	$I_{N\,(400V)}$	Cos φ			η			M_M/Mn	J	IM B3	LP
	kW	min^{-1}	N.m	A	4/4	3/4	2/4	4/4	3/4	2/4		kg.m²	kg	db(A)
LSMV 80 L	0,75	2859	2,51	1,68	0,85	0,77	0,66	78,6	78,8	77,2	3,0	0,00840	9,5	61
LSMV 80 L	1,1	2845	3,7	2,34	0,85	0,78	0,78	79,7	80,9	79,2	3,4	0,00095	10,7	61
LSMV 90 S	1,5	2860	4,91	3,16	0,84	0,76	0,62	81,7	82,3	80,6	4,5	0,00149	12,9	64
LSMV 90 L	2,2	2870	7,13	4,46	0,84	0,76	0,63	83,7	83,7	81,6	4,1	0,00197	16,1	64
LSMV 100 L	3	2870	10,0	5,87	0,87	0,81	0,69	84,8	85,6	84,5	4,0	0,00267	22,2	66

Moment d'inertie

J

kg.m²



b) Pour les trois premières références du tableau, calculer en $rad \cdot s^{-2}$ l'accélération angulaire $\alpha_{rotor/stator}$ par application rapide du PFD.

- *L'accélération sera supposée constante et on considèrera que le couple développé est le couple nominal.*
- *Le moteur fonctionne sans charge (à vide).*

On peut se limiter à l'application du théorème du moment dynamique car on souhaite connaître simplement l'accélération angulaire :

=> On isole le rotor.

=> BAME : seul le couple moteur va intervenir sur l'axe $\vec{x}$; il n'y a rien d'autre.

PFD : $\sum M_G\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)=I_G\times\alpha \;\Rightarrow\; C_m=I_G\times\alpha \;\Rightarrow\; \alpha=\dfrac{C_m}{I_G}$

Référence 1 : $\alpha=\dfrac{C_m}{I_G}=\dfrac{2{,}51}{0{,}0084}=298{,}8\ rad\cdot s^{-2}$

Référence 2 : $\alpha=\dfrac{C_m}{I_G}=\dfrac{3{,}7}{0{,}00095}=3895\ rad\cdot s^{-2}$

Référence 3 : $\alpha=\dfrac{C_m}{I_G}=\dfrac{4{,}91}{0{,}00149}=3295\ rad\cdot s^{-2}$

c) Partant de la première référence, on souhaite disposer d'une inertie 20 % plus grande que celle du rotor seul. Pour cela on prévoit d'ajouter un disque plein en acier d'épaisseur $e=30\ mm$. Calculer en mm le diamètre de ce disque. Arrondir le résultat à l'unité près.

L'inertie du rotor seul est $I_{rotor}=0{,}0084\ kg\cdot m^2$

L'inertie totale souhaitée est $I_{totale}=1{,}2\cdot I_{rotor}=1{,}2\times0{,}0084=0{,}01\ kg\cdot m^2$

Par ailleurs, on a $I_{totale}=I_{rotor}+I_{disque} \;\Leftrightarrow\; I_{disque}=I_{totale}-I_{rotor}=0{,}01-0{,}0084=0{,}00168\ kg\cdot m^2$

De plus, le moment d'inertie d'un disque plein est donné par la relation $I_{disque}=\dfrac{M\cdot R^2}{2}=\dfrac{M\cdot d^2}{8}$ *avec*

$M=\rho\cdot V$ *et* $V=e\cdot\dfrac{\pi\cdot d^2}{4}$ *soit,* $I_{disque}=\dfrac{M\cdot R^2}{2}=\dfrac{\rho\cdot e\cdot\pi\cdot d^4}{32}$

Ainsi, on a : $d=\sqrt[4]{\dfrac{32\cdot I_{disque}}{\rho\cdot e\cdot\pi}}=\sqrt[4]{\dfrac{32\times0{,}00168}{7800\times0{,}03\times\pi}}=0{,}0925\ m$

Soit, dans l'unité demandée : $d=92\ mm$

CONTEXTE 2 : Le moment d'inertie intervient en énergétique.

Un solide possédant un mouvement de rotation dispose d'une énergie cinétique de rotation.

a) Pour les trois premières références du tableau, calculer en J l'énergie cinétique du rotor.

Les vitesses de rotation nominales seront considérées.

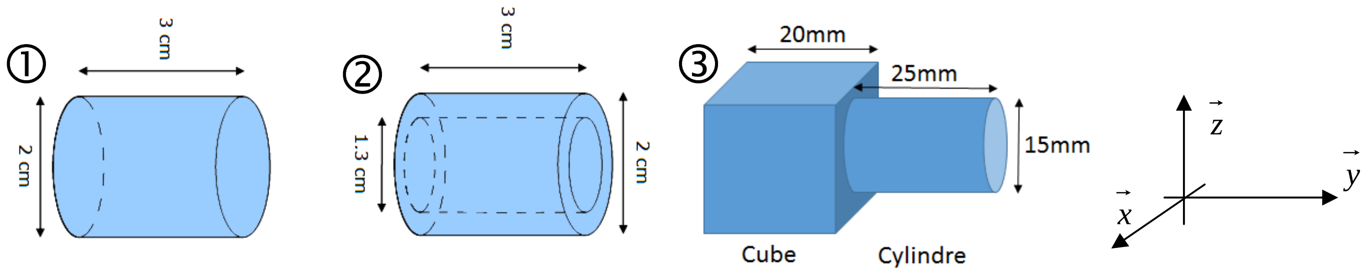
Référence 1 : $E=I_G\cdot\omega^2=I_G\cdot\left(\dfrac{\pi\cdot N}{30}\right)^2=0{,}0084\times\left(\dfrac{\pi\times2859}{30}\right)^2=753\ J$

Référence 2 : $E=I_G\cdot\omega^2=I_G\cdot\left(\dfrac{\pi\cdot N}{30}\right)^2=0{,}00095\times\left(\dfrac{\pi\times2845}{30}\right)^2=84\ J$

Référence 3 : $E=I_G\cdot\omega^2=I_G\cdot\left(\dfrac{\pi\cdot N}{30}\right)^2=0{,}00149\times\left(\dfrac{\pi\times2860}{30}\right)^2=133{,}6\ J$

EXERCICE 3

On considère les trois géométries suivantes en acier. Calculer en $kg\cdot cm^2$ leur moment d'inertie I_{GY}.



Géométrie 1 : cylindre plein

Le formulaire donne : $I_{GY1}=\dfrac{M\cdot R^2}{2}=\dfrac{M\cdot d^2}{8}$

avec $M_1=\rho\cdot V_1$ *et* $V_1=h\cdot\dfrac{\pi\cdot d^2}{4}$

soit, $I_{GY1}=\dfrac{M_1\cdot d^2}{8}=\dfrac{\rho\cdot h\cdot\pi\cdot d^4}{32}=\dfrac{7800\times3\times\pi\times2^4}{32}=36757\ kg\cdot cm^2$

Géométrie 2 : cylindre creux

Le formulaire donne : $I_{GY2}=\dfrac{M\cdot\left(R^2+r^2\right)}{2}=\dfrac{M\cdot\left(D^2+d^2\right)}{8}$

avec $M_2=\rho\cdot V_2$ *et* $V_2=h\cdot\dfrac{\pi\cdot D^2}{4}-h\cdot\dfrac{\pi\cdot d^2}{4}=\dfrac{h\cdot\pi}{4}\cdot\left(D^2-d^2\right)$

soit,

$$\begin{aligned}
I_{GY2}&=\frac{M\cdot\left(R^2+r^2\right)}{2}\\
&=\frac{\rho\cdot h\cdot\pi\cdot\left(D^2-d^2\right)\cdot\left(D^2+d^2\right)}{32}\\
&=\frac{\rho\cdot h\cdot\pi\cdot\left(D^4-d^4\right)}{32}\\
&=\frac{\rho\cdot h\cdot\pi\cdot\left(D^4-d^4\right)}{32}\\
&=\frac{7800\times3\times\pi\times\left(2^4-1{,}3^4\right)}{32}
\end{aligned}$$

$I_{GY2}=30195\ kg\cdot cm^2$

Géométrie 3 : géométrie complexe à décomposer en un cube et un cylindre

$$I_{GY2} = I_{GYcube} + I_{GYcylindre}$$

avec

$$I_{GYcube} = \frac{M_{cube} \cdot \left(a^2 + a^2\right)}{12} = \frac{\rho \cdot a^5}{6} = \frac{7800 \times 2^5}{6} = 41600\ kg \cdot cm^2$$

$$I_{GYcylindre} = \frac{M_{cylindre} \cdot d^2}{8} = \frac{\rho \cdot h \cdot \pi \cdot d^4}{32} = \frac{7800 \times 2{,}5 \times \pi \times 1{,}5^4}{32} = 9692\ kg \cdot cm^2$$

Soit,

$$I_{GY2} = I_{GYcube} + I_{GYcylindre}$$
$$= 41600 + 9692$$
$$I_{GY2} = 51292\ kg \cdot cm^2$$

EXERCICE 4 (un peu calculatoire)

On considère un cylindre (1) en acier de diamètre $d_1 = 70\ mm$, de hauteur $h = 150\ mm$, de centre de gravité G, d'axe X et de moment d'inertie $I_{GX(1)}$.

On considère également une sphère (2) en acier de diamètre d_2 et de moment d'inertie $I_{GX(2)}$.

Calculer en mm le diamètre de la sphère qui vérifie l'égalité $I_{GX(1)} = I_{GX(2)}$.

$$I_{GY1} = \frac{M_1 \cdot R_1^{\,2}}{2} \text{ avec } M_1 = \rho \cdot V_1 \text{ et } V_1 = h \cdot \pi \cdot R_1^{\,2}$$

$$I_{GY2} = \frac{2 \cdot M_2 \cdot R_2^{\,2}}{5} \text{ avec } M_2 = \rho \cdot V_2 \text{ et } V_2 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_2^{\,3}$$

$$I_{GX(1)} = I_{GX(2)}$$

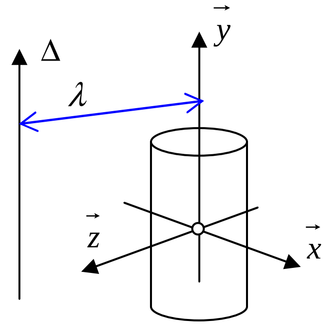
$$\frac{M_1 \cdot R_1^{\,2}}{2} = \frac{2 \cdot M_2 \cdot R_2^{\,2}}{5}$$

$$\frac{h \cdot R_1^{\,4}}{2} = \frac{8 \cdot R_2^{\,5}}{15}$$

$$R_2 = \sqrt[5]{\frac{15 \cdot h \cdot R_1^{\,4}}{16}} = \sqrt[5]{\frac{15 \times 0{,}15 \times 0{,}035^4}{16}} = 0{,}0462\ m \equiv 46{,}2\ mm$$

$$d_2 = 2 \times R_2 = 2 \times 46{,}2 = 92{,}4\ mm$$

EXERCICE 5 (théorème de Huygens)



On considère un cylindre en aluminium d'axe Y. Il a un diamètre $d = 100\ mm$ et une hauteur $h = 40\ mm$, un centre de gravité G. Un axe Δ est parallèle à l'axe (GY) et distant de $\lambda = 80\ mm$.

a) Placer la cote λ sur la figure ci-contre.

b) Calculer en kg la masse M du cylindre.

$$M = \rho \cdot V = \rho \cdot h \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 2700 \times 0{,}04 \times \frac{\pi \times 0{,}1^2}{4} = \underline{0{,}848\ kg}$$

c) Calculer en $kg \cdot m^2$ le moment d'inertie I_{GY} du cylindre.

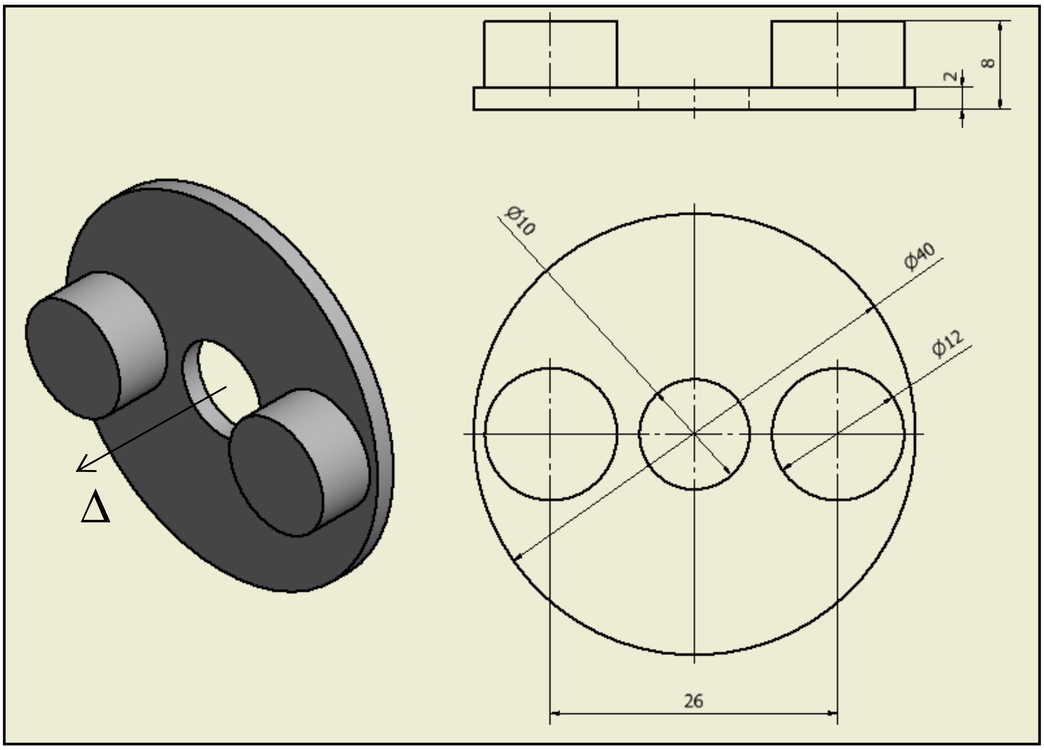
$$I_{GY} = \frac{M \cdot R^2}{2} = \frac{0{,}848 \times 0{,}05^2}{2} = \underline{1{,}06 \cdot 10^{-3}\ kg \cdot m^2}$$

d) Calculer en $kg \cdot m^2$ le moment d'inertie I_Δ du cylindre.

$$I_\Delta = I_{GY} + M \cdot \lambda^2 = 1{,}06 \cdot 10^{-3} + 0{,}848 \times 0{,}08^2 = \underline{6{,}49 \cdot 10^{-3}\ kg \cdot m^2}$$

EXERCICE 6 (théorème de Huygens)

On considère une pièce de révolution en alliage léger dont la géométrie est donnée ci-contre.



a) Calculer en $kg \cdot m^2$ son moment d'inertie $I_{G\Delta}$.

Le corps est à géométrie complexe. Il faut le décomposer en éléments simples.

On distingue :

Un cylindre creux de diamètre 40 mm, d'épaisseur 6 mm avec un trou central débouchant de diamètre 10 mm.

Masse : $M_1 = 7800 \times \left(0{,}002 \times \frac{\pi}{4} \times \left(0{,}04^2 - 0{,}01^2\right)\right) = 0{,}0184\ kg$

Et

Deux cylindres diamètre 6 mm hauteur 12 – 6 = 6 mm excentrés de 26 / 2 = 13 mm.

Masse : $M_2 = 7800 \times \left(0{,}006 \times \pi \times \frac{0{,}006^2}{4} \right) = 1{,}32 \cdot 10^{-3}\ kg$

Δ *est l'axe de révolution de la géométrie.*

Pour avoir le moment d'inertie recherché, $I_{G\Delta}$, il suffit de sommer l'inertie des trois corps simples :

$$I_{G\Delta} = I_{G\Delta 1} + 2 \times I_{G\Delta 2}$$

Avec :

$$\begin{aligned} I_{G\Delta 1} &= \frac{M_1 \cdot \left(r_1^2 + R_1^2\right)}{2} \\ &= 0{,}0184 \times \frac{\left(0{,}02^2 + 0{,}005^2\right)}{2} \\ I_{G\Delta 1} &= 3{,}91 \cdot 10^{-6}\ kg \cdot m^2 \end{aligned}$$

Moment d'inertie du petit cylindre autour de son axe :

$$\begin{aligned} I_{G2} &= \frac{M_2 \cdot R_2^2}{2} \\ &= 1{,}32 \cdot 10^{-3} \times \frac{0{,}006^2}{2} \\ I_{G2} &= 2{,}38 \cdot 10^{-8}\ kg \cdot m^2 \end{aligned}$$

Moment d'inertie du petit cylindre autour de son axe :

$$\begin{aligned} I_{G\Delta 2} &= I_{G2} + M_2 \times exentricité^2 \\ &= 3{,}91 \cdot 10^{-6} + 2{,}38 \cdot 10^{-8} \times 0{,}013^2 \\ I_{G\Delta 2} &= 3{,}93 \cdot 10^{-6}\ kg \cdot m^2 \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} I_{G\Delta} &= I_{G\Delta 1} + 2 \times I_{G\Delta 2} \\ &= 0{,}975 + 2 \times 2{,}23 \cdot 10^{-4} \\ I_{G\Delta} &= 9{,}75 \cdot 10^{-1}\ kg \cdot m^2 \end{aligned}$$

La pièce est montée sur l'arbre du moteur LSMV80L.

b) Calculer en $kg \cdot m^2$ l'inertie totale I_{total} .

$$\begin{aligned} I_{total} &= I_{G\Delta} + I_{rotor} \\ &= 9{,}75 \cdot 10^{-1} + 0{,}0084 \\ I_{total} &= 9{,}84 \cdot 10^{-1}\ kg \cdot m^2 \end{aligned}$$